MINISTERE DE L'EQUIPEMENT,

DU LOGEMENT, DE L'AMENAGEMENT DU TERRITOIRE

ET DES TRANSPORTS

E.I.T.P.E. 1987

EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES (temps accordé : 2 heures)

L'épreuve comprend trois exercices totalement indépendants les uns des autres.

EXERCICE I

On se propose de déterminer deux polynômes P_n et Q_n, à coefficients réels, tous deux de degré n, tels que, si on cherche le développement limité au voisinage de zéro de la fonction $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ de la variable réelle x, on obtienne comme partie régulière de ce développement limité à l'ordre 2n, $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

a) Donner ces polynômes pour n = 1 et n = 2 .

b) Dans le cas général, posant $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$

avec $x^0 = 1$, déterminer deux systèmes de n équations affines, chacun permettant de calculer les a_k et les b_k. On prendra $a_0 = b_0 = 1$.

c) En utilisant le polynôme S tel que $S(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k x^{2n-k}}{(2n-k)!}$ et ses dérivées successives, calculer les b_k.

d) Calculer les a_k et vérifier que $P_n(x) = Q_n(-x)$.

EXERCICE II

On considère la suite (u_n) de nombres réels définie par la relation de récurrence :

$$(n+1)^2 u_n = (n-1)u_{n-1} - n \qquad (n \in N)$$

et commençant à $u_1 = 0$.

a) Prouver que la suite est bornée.

b) Prouver qu'elle a une limite et la trouver.

c) Montrer enfin qu'elle est monotone à partir d'un rang que l'on précisera.

EXERCICE III

Soient deux nombres complexes z et z' tels que zz' = 1. On pose $2z_1 = z + z'$. On appelle M , M' , M_1 , A , A' , les images, dans le plan représentatif des nombres complexes, des nombres z , z', z_1 +1 , -1.

1)a) Montrer que $\frac{z-1}{z+1} = -\frac{z'-1}{z'+1}$ et $\frac{z_1-1}{z_1+1} = \left[\frac{z-1}{z+1}\right]^2$

Interpréter ces relations en modules et arguments au moyen des vecteurs représentatifs.

b) Indiquer la disposition dans le plan des points M, M', M_1, A, A', et la construction des points M et M' connaissant le point M_1, à l'aide seulement d'un compas et d'une règle non graduée.

2) On suppose que z et z' varient de façon que $|z-z'| = 2$ constamment.

a) Montrer que le quadrilatère AMA'M' devient un trapèze isocèle.

b) Montrer que les points M et M' restent sur deux cercles fixes que l'on déterminera.

c) Trouver la courbe fixe que décrit le point de rencontre P des deux cotés égaux de ce trapèze et la courbe fixe à laquelle l'axe de symétrie du trapèze reste tangent.

N.B. Il est rappelé que la tangente au point M d'une hyperbole de foyers F et F' est la bissectrice intérieure de l'angle (MF , MF').